МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕСИТЕТ)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной и методической работе
_____________А.А. Воронов
20 августа 2017 г.

П Р О Г Р А М М А

по дисциплине: **Теория и реализация языков программирования**
по направлению: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
факультет: **ФУПМ**
кафедра: **математических основ управления**
курс: 2
семестр: 3
Трудоёмкость: вариативная часть – 3 зач. ед.

лекции – 30 часов Экзамен – 3 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов Диф. зачет – нет
лабораторные занятия – нет
Самостоятельная работа – 18 час.

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60

Программу составили: д.ф.-м.н. В. А. Серебряков,
асс. Д. А. Голубенко, к.т.н. Д. Р. Гончар, асс. Д. С. Лещёв,
к.ф.-м.н. А. А. Рубцов, к.ф.-м.н. С. П. Тарасов,
ст. преп. К. Б. Теймуразов.

Программа принята на заседании кафедры
математических основ управления
24 апреля 2017 года

Заведующий кафедрой С. А. Гуз

1. Известные и перспективные направления эффективного применения теории формальных языков как математической дисциплины. Алфавиты, цепочки, языки и их представление. Формальное определение грамматики. Типы грамматик по Хомскому и их свойства. Связь машин Тьюринга и грамматик типа 0. Линейно-ограниченные автоматы и их связь с КЗ-грамматиками.

2. Лексический анализ. Регулярные языки (РЯ) и регулярные выражения (РВ). Конечные автоматы (КА). Детерминированные и недетерминированные КА (ДКА и НКА). Эквивалентность классов языков, определяемых КА, РВ и автоматными грамматиками (грамматики типа 3: леволинейные – ЛЛ, праволинейные – ПЛ). Свойства замкнутости РЯ. Лемма о накачке для РЯ. Теорема Майхилла-Нероуда и минимальные автоматы. Алгоритмы поиска подстрок и КА. Алгоритм Кнута–Морриса–Пратта (КМП-алгоритм), реализация структуры данных «словарь», алгоритм Ахо-Корасик.

Алгоритмы по теме КА

- Построение ДКА по НКА.
- Построение НКА по РВ.
- Построение ДКА по РВ.
- Построение РВ по НКА.
- По РВ R проверить, что слово принадлежит L(R).
- Построить по языку L язык L^R.
- Построение произведения (конкатенации) РЯ, дополнение РЯ, пересечение РЯ.
- Построение минимального автомата по ДКА.
- КМП-алгоритм.
- Построение по НКА эквивалентных ЛЛ- и ПЛ-грамматик.
- Построение эквивалентного НКА по ЛЛ- и ПЛ-грамматике.
- Решение уравнений с регулярными коэффициентами.

3. Синтаксический анализ: КС-грамматики (КСГ). Преобразования КС-грамматик, приведённые грамматики. Канонические формы КС-грамматик (нормальная форма Хомского). Свойства замкнутости КС-языков (КСЯ), незамкнутость КСЯ относительно пересечения. Дерево вывода КСГ. Однозначность КС-грамматик. Однозначность праволинейной грамматики, построенной по ДКА. Лемма о накачке для КСЯ. Проверка принадлежности слова КСЯ КСГ (алгоритм Кока–Янгера–Касами). Сжатие строк на основе КС-грамматик (straight-line grammars). Алгоритм Лемпеля-Зива-Велча.

4. Синтаксический анализ: автоматы с магазинной памятью (МА). Детерминированные и недетерминированные МА. Обобщенные МА и их эквивалентность стандартным МА. Эквивалентность МА, распознающих по конечному состоянию (F-МА) и по опустошению магазина (N-МА). Эквивалентность КСГ и МА. Однозначность КСГ, построенной по детерминированному N-МА (без доказательства).

Алгоритмы по теме КСГ и МА

- Удаление недостижимых и бесполезных символов в КСГ. Удаление циклов.
- Удаление левой рекурсии в КСГ.
- Приведение КСГ к нормальной форме Хомского и нормальной форме Грейбах.
- Проверка принадлежности слова КСГ (алгоритм Кока–Янгера–Касами).
- Преобразование N-МА → F-МА.
- Преобразование F-МА → N-МА.
- Преобразование КСГ в эквивалентный N-МА.
- Преобразование N-МА в эквивалентную КСГ (с доказательством корректности для N-МА с одним состоянием).

5. Дополнительные сведения из теории конечных автоматов. Минимизация числа состояний и эквивалентность детерминированного конечного автомата (ДКА).

6. Предсказывающий разбор *сверху вниз*. Алгоритм разбора *сверху вниз*. Функции *FIRST* и *FOLLOW*. Конструирование таблицы предсказывающего анализатора. LL(1)-грамматики. Удаление левой рекурсии. Левая факторизация. Рекурсивный спуск. LL(k)-грамматики. Разбор *снизу вверх* типа сдвиг-свёртка. Основа. LR(1)-анализаторы. Конструирование

LR(1)-таблицы. LR(1)-грамматики. Варианты LR-анализаторов. LR(k)-грамматики.

7. Элементы теории перевода. Синтаксически управляемый перевод. Атрибутные грамматики.

Литература

1. *Ахо А., Сети Р., Ульман Дж.* Компиляторы. Принципы, технологии, инструменты. М., СПб., Киев: Вильямс, 2001.
2. *Мартыненко Б.К.* Языки и трансляции. СПб.: СПбГУ, 2004. Доступно по ссылке *http://trpl7.ru/t-books/Martin/Martinenko_FLT_Cont.htm*.
3. *Серебряков В. А., Галочкин М. П., Гончар Д. Р., Фуругян М. Г.* Теория и реализация языков программирования: учеб. пос. М.: МЗ-Пресс, 2006. 352 с.
4. *Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж.* Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. М.: Вильямс, 2002.
5. *Ахо А., Лам М., Сети Р., Ульман Дж.* Компиляторы. Принципы, технологии и инструментарий. М., СПб., Киев: Вильямс, 2011. 1184 с.
6. *Шень А. Х.* Программирование: теоремы и задачи. М.: МЦНМО, 2004. Доступно по ссылке https://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-progbook.pdf.

Задание

Задачи, выделенные в дополнительный раздел, а также задачи, помеченные звёздочкой, являются дополнительными и необязательными. Контрольные вопросы являются полноценными задачами, хотя и выделены в отдельные блоки. Решение всех задач должно быть обосновано. Отдельные указания по необходимости обоснования в некоторых задачах являются акцентированием и вовсе не означают, что в других задачах обоснование не требуется. Использование алгоритмов из курса (см. программу), считается обоснованием. При использовании алгоритма проверяющий должен иметь возможность проверить корректность протокола: решения в духе «автомат построен по алгоритму, но вот только ответ» не оцениваются.

Если в формулировке вопроса задачи используются обороты «верно ли, что» и «может ли быть», то в случае положительного ответа приведите доказательство, а в случае отрицательного – контрпример. Верное рассуждение без контрпримера оценивается в половину задачи.

Всё вышесказанное относится ко всем письменным работам курса.

Ссылки на литературу указаны по библиографии в программе курса.

Регулярные языки

Задача 1. Определим язык $L \subseteq \{a, b\}^*$ индуктивными правилами:

1. $\varepsilon, b, bb \in L$;
2. вместе с любым словом $x \in L$ в L также входят слова $ax, bax, bbax$;
3. никаких других слов в L нет.

Язык $T \subseteq \{a, b\}^*$ состоит из всех слов, в которых нет трёх букв b подряд.

1. Докажите или опровергните, что $L = T$.[1]

[1]Если равенство неверно, то нужно явно указать слово, принадлежащее одному языку и не принадлежащее другому. Если равенство верно, то нужно провести доказательство по индукции в обе стороны: $L \subseteq T$ и $T \subseteq L$.

2. Запишите язык T в виде регулярного выражения.

3. Постройте конечный автомат, принимающий T. Докажите (по индукции), что построенный автомат принимает язык T.

Задача 2. Верно ли, что

1) $\varepsilon \in \{a, aab, aba\}$?

2) $\varnothing \in \{a, aab, aba\}$?

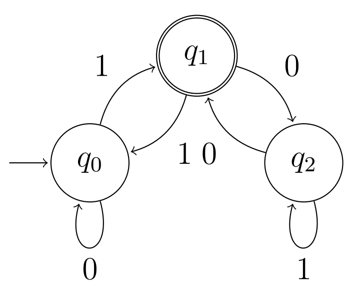
Задача 3.

1. Задайте множество $\{a^n \mid n > 0\} \times \{b^n \mid n \geqslant 0\}$ формулой, которая не использует символ $\times$.

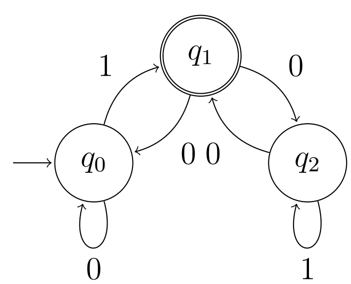
2. Опишите язык $\{a^{3n} \mid n > 0\} \cap \{a^{5n+1} \mid n \geqslant 0\}^*$ регулярным выражением.

Задача 4. Автоматы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ заданы диаграммами. Выполните следующие задания.

Автомат $\mathcal{A}$:



Автомат $\mathcal{B}$:



Для каждого автомата ответьте на следующие вопросы (1–2).

1. Автомат задан через граф переходов. Запишите определение автомата в виде $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Опишите элементы каждого множества.

2. Явлется ли автомат детерминированным?

Ответьте на вопросы.

3. Опишите последовательность конфигураций автомата $\mathcal{A}$ при обработке слова $w = 011001$. Верно ли, что $w \in L(\mathcal{A})$?

4. Принимает ли автомат $\mathcal{B}$ слово $v = 0101001$?

5. Укажите по одному слову, принадлежащему $L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{B})$ и по одному слову, не принадлежащему $L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{B})$. Все 4 слова должны быть различными.

Задача 5. Выполните следующие задания.

1. Построить ДКА, принимающий язык L, состоящий из всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые содержат чётное число нулей и нечётное число единиц.

2. Построить эквивалентную леволинейную грамматику. Будет ли она однозначной?

3. Построить регулярное выражение для языка L^R.

Задача 6. Будут ли регулярными следующие языки?

1. $L = \{a^{2016n+5} \mid n = 0, 1, \} \cap \{a^{503k+29} \mid k = 401, 402, \ldots\} \subseteq \{a^*\}$.

2. $L_2 = \{a^{200n^2+1} \mid n = 1000, 1001, \ldots\} \subseteq \{a^*\}$.

3. Язык L_3 всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые представляют числа в двоичной записи, дающие остаток два при делении на три (слово читается со старших разрядов). Например, $001010 \notin L_3$ $(1010_2 = 10_{10} = 3\times3+1)$, а $10001 \in L_3$ $(10001_2 = 17_{10} = 5 \times 3 + 2)$.

Задача 7. Постройте НКА, принимающий язык $L_3 = \{$ Множество слов в алфавите $\{a, b\}$, у которых третий от конца[2] символ равен «a»$\}$. Затем, используя алгоритм, постройте соответствующий полный ДКА.

[2] Последний символ слова равен первому символу с конца слова.

Задача 8. Порождает ли регулярное выражение $(ab)^*(ba)^*$ тот же язык, что распознаёт ДКА $M = (\{A, B, C, D\},\ \{a, b\},\ \delta,\ A,\ \{A, D, E\})$, где функция переходов задана следующим образом:

$$\delta(A, a) = B,\ \delta(A, b) = C,\ \delta(B, b) = D,\ \delta(C, a) = E,$$

$$\delta(D, a) = B,\ \delta(D, b) = C,\ \delta(E, b) = C.$$

Задача 9. Покажите, что следующий язык удовлетворяет лемме о разрастании для регулярных языков, но сам регулярным не является:

$$L = \{ab^{2^i} \mid i \geqslant 0\} \cup \{b^j \mid j \geqslant 0\} \cup \{a^m b^n \mid m > 1, n \geqslant 0\}.$$

Задача 10. Решите уравнения с регулярными коэффициентами. В каждом пункте нужно выполнить три задания:

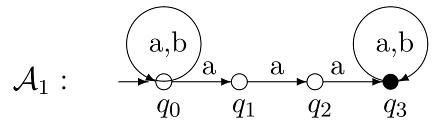
1) найти частное решение;
2) найти решение, минимальное по включению;
3) найти все решения.

1. $X = ((110)^* + 111^*)X.$

2. $X = (00 + 01 + 10 + 11)X + (0 + 1 + \varepsilon).$

3. $\begin{cases} Q_0 &= 0Q_0 + 1Q_1 + \varepsilon, \\ Q_1 &= 1Q_0 + 0Q_2, \\ Q_2 &= 0Q_1 + 1Q_2. \end{cases}$

Задача 11. Автомат $\mathcal{A}_1$ задан диаграммой. Выполните следующие задания. Достаточно выполнить хотя бы один из пунктов 2 или 3.



1. По диаграмме $\mathcal{A}_1$ постройте праволинейную грамматику G.

2. Запишите определяющую систему уравнений для G. Найдите её наименьшую неподвижную точку и вычислите регулярное выражение α_1 для $L(\mathcal{A}_1)$.

3. Определите регулярное выражение α_2 для $L(\mathcal{A}_1)$ с помощью индуктивного вычисления множеств R_{ij}^k.

4. Выберите какое-нибудь регулярное выражение α_1 или α_2 и постройте НКА $\mathcal{A}_2$ по регулярному выражению.

5. Выберите какой-нибудь НКА $\mathcal{A}_1$ или $\mathcal{A}_2$ и постройте ДКА D_1.

6. Выберите какое-нибудь регулярное выражение α_1 или α_2 и постройте ДКА D_2.

7. Выберите какой-нибудь ДКА D_1 или D_2, дополните его, если нужно, до полного и постройте минимальный полный ДКА $\min \mathcal{A}$ для L. Для каждой пары состояний укажите соответствующие различающие их цепочки.

8*. По алгоритму КМП (Кнута–Мориса–Пратта) постройте автомат для L и сравните его с $\min \mathcal{A}$.

Контрольные вопросы

Несмотря на название раздела, все решения задач должны быть строго обоснованы.

Задача 12. Верно ли, что если пересечение языков $L_1,\ L_2 \subseteq \{a,b\}^*$ содержит язык $F = \{a^n b^n \mid n \geqslant 1\} : F \subseteq L_1 \cap L_2$, то хотя бы один из языков L_1 и L_2 является нерегулярным?

Задача 13. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ бесконечное семейство регулярных языков.

1. Верно ли, что язык $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_i$ является регулярным языком?

2. Верно ли, что язык $X = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_i$ является регулярным языком?

Задача 14. Язык L_1 объединили с конечным языком R и получили язык L ($L = L_1 \cup R$). Язык L оказался регулярным. Верно ли, что язык L_1 мог быть нерегулярным?

Задача 15. Язык задан контекстно-зависимой грамматикой, которая не является контекстно-свободной. Может ли он быть регулярным?

Приложение регулярных языков для поиска подстрок

Алгоритм Кнута-Морриса-Пратта

Одно из простых и естественных применений регулярных выражений – поиск в тексте (слове) t вхождения некоторого слова w. В терминах регулярных выражений, задача состоит в проверке принадлежности слова t языку, порождаемому РВ $\Sigma^* w \Sigma^*$. Однако, сходу придумать алгоритм, который выполняет эту проверку за линейное время не очень просто. Таким алгоритмом является алгоритм Кнута-Морриса-Пратта (КМП) и здесь мы опишем его на языке автоматов. С самим алгоритмом можно познакомиться, например в 10-ой главе книги **[6]**.

Для того, чтобы описать КМП-алгоритм, нам потребуется сначала ввести понятие префикс-функции.

Определение 1. Назовём *префикс-функцией* функцию $l : \Sigma^* \to \Sigma^*$, которая возвращает самый длинный собственный[3] префикс слова w, являющийся одновременно его суффиксом.

Пример 1. Приведём пример вычисления префикс-функции.

[3]То есть префикс, не совпадающий со всем словом w.

$$l(a^{n+1}) = a^n \qquad l(aabaaabaa) = aabaa$$
$$l(ababa) = aba \qquad l(aabaa) = aa$$
$$l(abb) = \varepsilon$$

У префикс-функции есть важное свойство – все собственные префиксы слова w, которые являются его суффиксами лежат в последовательности $l(w), l(l(w)), \ldots$

Зафиксируем слово w. Обозначим через $w[i, j]$ подслово $w_i w_{i+1} \ldots w_j$ слова $w = w_1 w_2 \ldots w_n$, здесь всюду $w_k \in \Sigma$. Для удобства будем считать, что $w[0, 0] = \varepsilon$, а $w[0, k] = w[1, k]$ при $k > 0$. Определим автомат, который будем называть *автоматом Кнута-Морриса-Пратта* или КМП-автоматом для слова w.

Определение 2. КМП-автоматом $\mathcal{A}_w$ для слова $w \in \Sigma^*$ длины n, называется автомат, который задан набором $(Q,\ \Sigma,\ q_0,\ \delta,\ F)$, где

- $Q = \{\ w[0,0],\ w[0,1],\ w[0,2], \ldots,\ w[0,n]\ \}$;
- $q_0 = w[0,0]$;
- $\delta(w[0,k], a) = \begin{cases} w[0,k+1], & \text{при } w[0,k+1] = w[0,k]a \text{ и } k < n; \\ l(w[0,k]a), & \text{при } w[0,k+1] \neq w[0,k]a \text{ и } k < n; \\ w[0,n], & \text{при } k = n. \end{cases}$
- $F = \{w[0,n]\}$.

Замечание 1. *В качестве множества состояний КМП-автомата выступает множество слов, поэтому применение для состояний операций со словами, например «$w[0,k+1] = w[0,k]a$», при определении функции переходов корректно и осмысленно.*

Задача 16. Постройте КМП-автомат для слова $ababb$ и продемонстрируйте его работу на слове $abababb$.

Структура данных «Словарь»

Под словарём понимают структуру данных, с помощью которой можно проверять вхождение слова в множество. У этой структуры данных есть следующие операции:

- **in**: добавить слово x в словарь;
- **test**: проверить входит ли слово x в словарь;
- **out**: удалить слово x из словаря.

Эту структуру данных можно реализовать с помощью автомата. На рис. 1 показан пример словаря с содержимым $S = \{a, ba, ab, abb, abab\}$, который реализован через ДКА. ДКА $\mathcal{A}$ принимает слово x тогда и только тогда, когда $x \in S$.

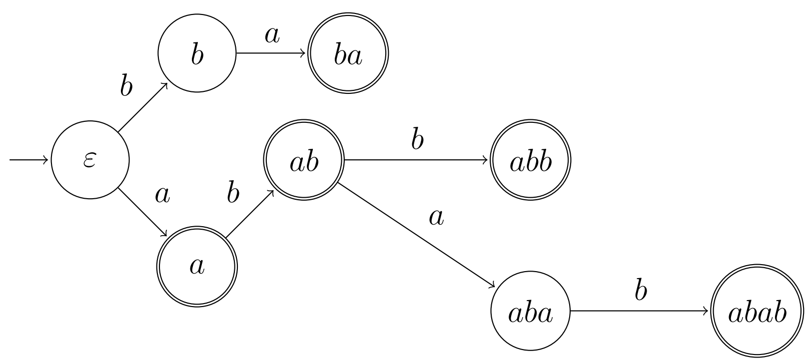


Рис. 1: ДКА $\mathcal{A}$ реализует словарь

Задача 17. Постройте алгоритмы, реализующие операции **in** и **out** для ДКА, реализующих словарь. В результате этих операций должен получиться ДКА, который реализует словарь с соответственно изменившимся содержимым.

Задача 18. Постройте алгоритм, который получает на вход конечное множество слов S и возвращает ДКА, реализующий словарь с содержимым S. Используйте при построении только известные из курса алгоритмы для регулярных множеств (выражений) и конечных автоматов.

Замечание. В задачах, в которых требуется построить алгоритм, необходимо доказательство его корректности.

Задача 19. Постройте ДКА для словаря $\{ac, acb, b, ba, c, cbb\}$. Добавьте в полученный словарь слово ab и удалите слово ac.

Алгоритм Ахо-Корасик

Алгоритм Ахо-Корасик позволяет проверять вхождение в текст t слов из заранее построенного словаря. Причём, алгоритм находит все вхождения за линейное время!

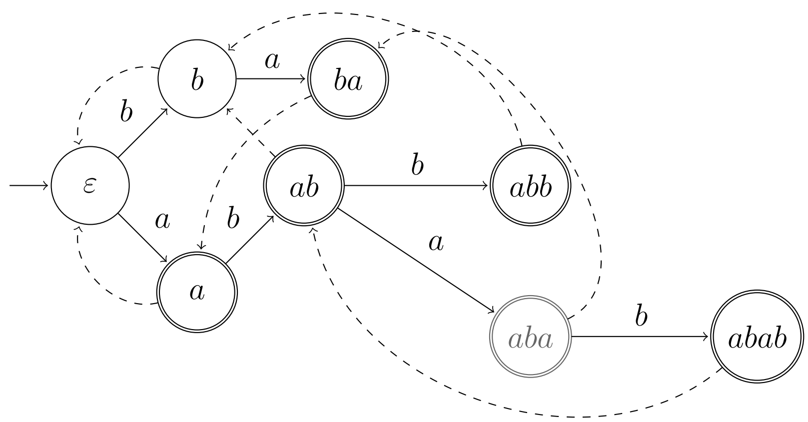


Рис. 2: Автомат Ахо-Корасик

Автомат для алгоритма Ахо-Корасик (рис. 2) построен следующим образом. Он содержит все состояния и переходы, что и соответсвующий автомат для словаря (рис. 1), но помимо этого к принимающим состояниям относятся те состояния, некоторый суффикс которых является принимающим: состояние aba выделено серым, поскольку слово aba не лежит в словаре, однако в словаре лежит слово ba. Пунктирные переходы используются в случае сбоя: переход из состояния u (состояние = некоторое слово) по пунктирной линии осуществляется в случае сбоя: если из u нет перехода по a, то автомат переходит в состояние s, в которое ведёт пунктирная стрелка, и пытается перейти по a из s и т.д. Переход из u в s добавляется согласно следующему правилу. Слово s должно быть самым длинным суффиксом слова u ($u = ps$), который является состоянием автомата Ахо-Корасик. Такие переходы называют *суффиксными ссылками*.

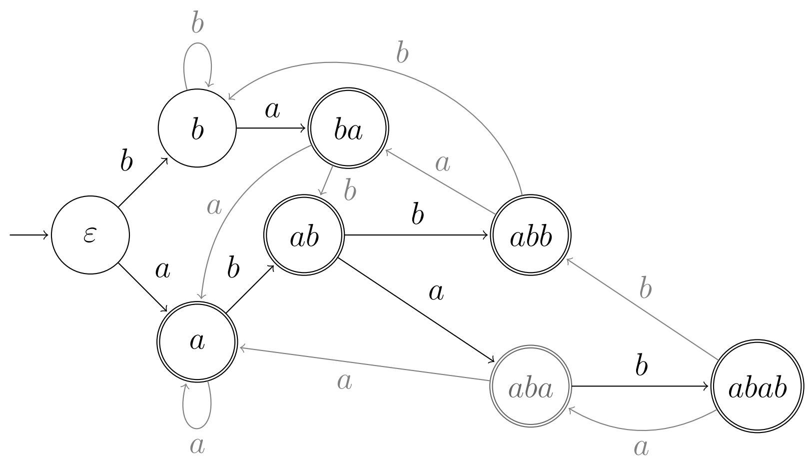


Рис. 3: ДКА Ахо-Корасик

Так, автомат Ахо-Корасик (рис. 2) по сути является ДКА (рис. 3), граф которого получается из автомата Ахо-Корасик добавлением явных переходов, которые были заданы суффиксными ссылками. ДКА (и соответсвенно автомат Ахо-Корасик) оказывается в принимающем состоянии тогда и только тогда, когда в тексте на входе автомата встретилось слово из словаря (возможно несколько одновременно). Заметим, что количество одновременно встретившихся подслов текста из словаря зависит только от состояния автомата.

Непосредственное построение ДКА Ахо-Корасик как правило неэффективно для приложений – суффиксные ссылки позволяют существенно сократить таблицу переходов и уменьшить тем самым длину описания автомата.

Задача 20. Постройте для словаря $S = \{ac, acb, b, ba, c, cbb\}$ (который вы строили в предыдущем разделе) автомат Ахо-Корасик. Посчитайте с его помощью количество различных вхождений слов из словаря S в подслово $acbacbb$.

Контекстно-свободные языки

Задача 21. Язык $L^=$ является языком всех слов с равным числом символов a и b.

1. Покажите индукцией[4] по длине слова, что КС-грамматика с правилами $S \to SS \mid aSb \mid bSa \mid \varepsilon$ порождает язык $L^=$.

2*. Грамматика называется линейной, если в правые части правил вывода входит не более одного нетерминала. Покажите, что язык $L^=$ не порождается никакой линейной КСГ.

Задача 22. Палиндромами называют слова, которые одинаково читаются слева направо и справа налево, например, «ротор».

1. Покажите, что язык палиндромов в произвольном алфавите является КС-языком.

2. Покажите, что дополнительный язык (язык всех непалиндромов) также является КС-языком.

3. Покажите, что дополнительный язык к языку $U = \{a^n b^n c^n, n = 0, 1, \ldots\}$ является КС-языком.[5]

Задача 23. Являются ли следующие языки КС-языками?

1. $SQ = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.
2. $\Sigma^* \setminus SQ$.
3. $\{a^{3^n} \mid n > 0\}$.

Задача 24. Выполните следующие задания.

[4] Другие доказательства, кроме индукции, не принимаются.

[5] Так как сам язык U не является КС-языком, то это означает, что в отличие от регулярных языков множество КС-языков не замкнуто относительно дополнения.

1. Постройте магазинный автомат (МА), распознающий язык $L^=$ из задачи **16**.

2*. Постройте детерминированный МА, распознающий тот же язык, и приведите доказательство его корректности по индукции.

Задача 25. Язык Дика с двумя типами скобок D_2 порождается грамматикой
$$S \to SS \mid (S) \mid [S] \mid \varepsilon.$$

1. Постройте недетерминированный МП-автомат, распознающий язык D_2.

2. Постройте детерминированный МП-автомат, распознающий язык D_2, и приведите доказательство его корректности по индукции.

Задача 26. Для языка
$$L = \{w \mid w = xcy; x, y \in \{a, b\}^*; |x| = |y|\}$$

1) постройте КС-грамматику G, порождающую язык L;

2) постройте недетерминированный МА, эквивалентный этой грамматике;

3) продемонстрируйте работу построенного МА на слове $acab$ (проанализируйте все варианты поведения).

Задача 27. Заданы грамматика $G = \{\ \{A, B, C, D, E, F, S\},\ \{a, b\}$, $\{S \to AB \mid C,\ A \to aE \mid a,\ E \to aE \mid \varepsilon,\ B \to bB \mid Bb \mid b,\ C \to CD$, $F \to ab,\ D \to aba\},\ S\}$ и магазинный автомат $M = (\{q_0\},\ \{a, b\}$, $\{S, a, b, A, B\},\ \{\delta(q_0, \varepsilon,\ S) = \{(q_0, AB)\},\ \delta(q_0, \varepsilon,\ A) = \{(q_0, aA), (q_0, a)\}$, $\delta(q_0, \varepsilon,\ B) = \{(q_0, bB), (q_0, b)\}, \delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\},\ \delta(q_0, b, b) = \{(q_0, \varepsilon)\}$, $q_0,\ S\}$, принимающий слова опустошением магазина.

1. Эквивалентны ли грамматика G и N-автомат[6] M?

[6] Мы называем N-автоматом МП-автомат, допускающий по пустому стеку, а F-автоматом — МП-автомат, допускающий по принимающему состоянию.

2. Однозначна ли грамматика G? Если нет, то постройте эквивалентную ей однозначную грамматику.

3. Является ли автомат M детерминированным? Если нет, постройте эквивалентный ему детерминированный МА.

Задача 28. Определим языки $L_1 = \Sigma^* aab \Sigma^*$, где $\Sigma = \{a, b\}$, и

$$L = \{w \mid w \in \overline{L_1},\, |w|_a \geqslant |w|_b\}.$$

1. Является ли дополнение языка L КС-языком?

2. Является ли дополнение языка L регулярным языком?

Задача 29. Язык L задан КС-грамматикой с правилами:

$$S \to aSa \mid aSb \mid bSa \mid bSb \mid a.$$

1. Является ли L регулярным языком?

2. Является ли дополнение L регулярным языком?

3. Является ли L КС-языком?

4. Является ли дополнение L КС-языком?

Задача 30. Язык L задан КС-грамматикой с правилами:

$$S \to aSb \,|\, A \,|\, B \,|\, \varepsilon, \quad A \to aAa \,|\, \varepsilon, \quad B \to bBb \,|\, \varepsilon.$$

1. Является ли L регулярным языком?

2. Является ли дополнение L регулярным языком?

3. Является ли L КС-языком?

4. Является ли дополнение L КС-языком?

Контрольные вопросы

Задача 31. КС-грамматика называется *левооднозначной*, если каждое слово порождаемого ею языка имеет единственный левый вывод. Аналогично определяется *правооднозначная грамматика*. Можно ли построить пример левооднозначной, но не правооднозначной КС-грамматики?

Задача 32. Пусть L_1 – КС язык, не являющийся регулярным, а L_2 – не КС-язык. Может ли язык L_2L_1 быть регулярным языком? При положительном ответе привести пример.

Приложение КС-грамматик для сжатия данных

Некоторые алгоритмы сжатия строк можно описать в терминах КС-грамматик. Мы рассмотрим два таких алгоритма. Первый из них носит название «Straight-line program» (SLP) и состоит в следующем. Слово w описывают с помощью КС-грамматики G_w, которая порождает единственное слово: $L(G_w) = w$. Грамматику G_w называют «Straight-line grammar» (SLG); этим же термином иногда называют и описываемый нами частный случай метода сжатия SLP: в роли программ выступают КС-грамматики.

Пример 2. Грамматика, описываемая правилами

$$S \to A_1A_1, \quad A_1 \to A_2A_2, \quad A_2 \to A_3A_3, \quad \dots \quad A_{n-1} \to A_nA_n, \quad A_n \to a$$

порождает единственное слово a^{2^n}. Длина описания грамматики не превосходит cn, для некоторой константы $c > 0$, то есть имеет длину порядка логарифма от длины порождаемого слова, что является хорошим коэффициентом сжатия.

Задача 33. Постройте SLG G_n, порождающую слово

$$a^nba^{n-1}ba^{n-2}b\dots ababa^2ba^3b\dots a^nb.$$

Длина описания G_n должна быть $cn, c > 0$. В качестве решения можно построить SLG G_5.

Замечание 2. *Преимуществом описанного метода сжатия является возможность эффективной проверки сжатого слова на регулярные события без разархивации. То есть, существует алгоритм, получающий на вход описание НКА $\mathcal{A}$ и SLP G_w и проверяющий непустоту пересечения $L(\mathcal{A}) \cap L(G_w)$ за полиномиальное время от длин описаний $\mathcal{A}$ и G_w, но не w.*

Задача 34*. Постройте описанный выше алгоритм и докажите его корректность.

Мы описали общий метод сжатия SLP, но не описали пока алгоритма сжатия строк в грамматики. Таких алгоритмов существует несколько, одним из популярных алгоритмов сжатия такого типа является алгоритм Лемпеля-Зива-Велча (Lempel-Ziv-Welch, LZW). Опишем работу этого алгоритма на примере сжатия конкретной строки: *aababbbbaabaabab*.

a	ab	abb	b	ba	aba	$abab$
A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7

Таблица 4: разбиение строки алгоритмом LZW

Таблица 4 представляет собой словарь. Она устанавливает взаимно однозначное соответствие между нетерминалами и словами: слово w_i в построенной в итоге грамматике будет выводимо из A_i и только из A_i (но не обязательно за один шаг вывода). Опишем алгоритм заполнение таблицы-словаря.

1. В начале работы словарь пуст, слово u – необработанный суффикс слова w – совпадает с w, $i = 1$.

2. Алгоритм ищет максимальный префикс x необработанной части входа u, который был добавлен в словарь.

3. Если $u = xav, a \in \Sigma$, то алгоритм добавляет в словарь слово $w_i = xa$, удаляет префикс xa из u, увеличивает i на 1 и переходит к предыдущему шагу, если $u \neq \varepsilon$. Если же $u = \varepsilon$, алгоритм заканчивает работу.

4. Если $u = x$ и x уже соответствует некоторому нетерминалу A_j, то алгоритм добавляет в грамматику правило $A_i \to A_j$ и завершает работу. Обратим внимание, что x на этом шаге является суффиксом w.

Так, первая буква слова w всегда будет приписана нетерминалу A_1; далее в нашем примере за первой a идёт подслово ab, которое приписывается нетерминалу A_2, поскольку первая буква подслова a уже была приписана A_1; далее идёт подслово abb – подслово ab уже было приписано A_2 и т.д.

Нетрудно заметить, что искомая SLG имеет вид

$$S \to A_1A_2\dots A_7, \quad A_1 \to a, \quad A_2 \to A_1b, \quad A_3 \to A_2b,$$

$$A_4 \to b, \quad A_5 \to A_4a, \quad A_6 \to A_2a, \quad A_7 \to A_6b.$$

Но как её эффективно построить алгоритмически, равно как и таблицу 4? Для этого воспользуемся техникой, базирующейся на конечных автоматах.

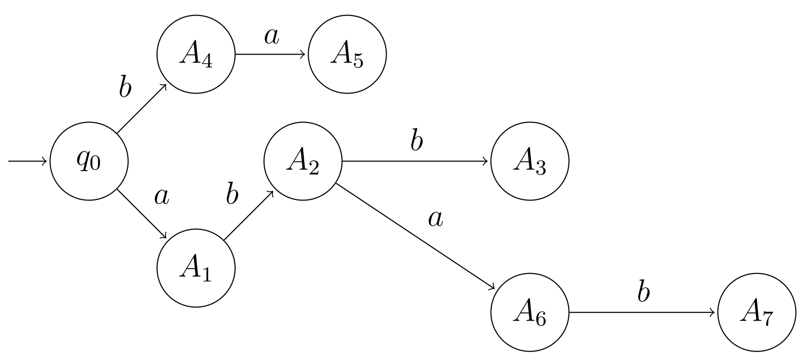


Рис. 5: LZW-автомат

В процессе построения SLG по алгоритму LZW мы строим LZW-автомат (рис. 5), который по-сути реализует словарь. Однако помимо стандартных функций словаря, LZW-автомат помечает каждую вершину, кроме начальной, нетерминалом A_i, устанавливая тем самым соответствие между словом w_i и состоянием автомата: $q_0 \xrightarrow{w_i} A_i$.

Итак, опишем алгоритм LZW построения SLG. В начале работы алгоритма словарь (реализуемый LZW-автоматом) пуст; обозначим через u необработанную часть входа – в начале работы $u = w$.

Алгоритм находит кратчайший префикс $x \neq \varepsilon$ слова $u = xy$, которого ещё нет в словаре и добавляет его в словарь, помечая вершину, соответствующую этому слову новым нетерминалом A_i. Алгоритм повторяет этот процесс удалив из u префикс x $(u = y)$ до тех пор пока либо слово u не окажется пустым, либо u не будет содержаться в словаре. При этом, если префикс x добавляется в словарь, то $x = va, a \in \Sigma$, а слово v уже было добавлено в словарь и ему соответствует некоторый нетерминал A_j. Тогда алгоритм добавляет в грамматику переход $A_i \to A_j a$. Если же u целиком содержится в словаре, то ему уже соответствует нетерминал A_j – в этом случае алгоритм добавляет правило $A_i \to A_j$. После окончания построения LZW-автомата, алгоритм добавляет к грамматике правило $S \to A_1 \dots A_n$, где n – номер последнего добавленного нетерминала.

Приведённый алгоритм очевидно работает за линейное время (от длины w). Строку, сжатую алгоритмом LZW легко декодировать как и строку, заданную произвольной SLG: нужно вывести единственную строку из грамматики, при этом каждый нетерминал раскрывается единственным образом. Также для алгоритма LZW справедливо замечание 2.

Задача 35. Постройте LZW-автомат и SLG G_w по описанному выше алгоритму для слова w:

1) $w = a^8$; 2. $w = tobeornottobeortobeornot$.

Задача 36. Постройте для слова $w = tobeornottobeortobeornot$ SLG, которая оптимальнее, чем построенная по алгоритму LZW. Численным показателем оптимальности является сумма длин правых частей всех правил SLG.

Элементы синтаксического анализа

LL-анализ

Задача 37. Определить, являются ли LL(k)-грамматиками следующие грамматики (заданные правилами). Если да, указать точное значение k:

а) $S \to Ab$, $\quad A \to Aa \mid a$;

б) $S \to Ab$, $\quad A \to aA \mid a$;

в) $S \to aAb$, $\quad A \to BB$, $\quad B \to ab \mid A \mid \varepsilon$;

г) $S \to aAb$, $\quad A \to AaAb \mid \varepsilon$;

д) $S \to aB$, $\quad B \to aBB \mid b$.

Задача 38. Построить LL(1)-грамматику, эквивалентную грамматике из задачи **26(б)**, и управляющую таблицу для неё.

Задача 39. Написать для грамматики эквивалентную LL(1)-грамматику, построить LL(1)-анализатор и продемонстрировать его работу на слове $baab$.

$$S \to baaA \mid babA \qquad A \to \varepsilon \mid Aa \mid Ab$$

Задача 40*. Докажите, что язык $a^* \cup a^n b^n$ не является LL(1)-языком, то есть не существует LL(1)-грамматики, порождающей этот язык.

Задача 41. Язык L задан неоднозначной КС-грамматикой

$$G = \{\{S\}, \{(,)\}, \{S \to (S) \mid SS \mid ()\}, S\}.$$

Написать LL(1)-грамматику для языка L.

Контрольные вопросы

Задача 42. Существует ли такая праволинейная (не обязательно регулярная праволинейная) грамматика, которая не является LL(1)-грамматикой?

Задача 43. В приведённой грамматике[7] G есть правило $S \to AB$ и при этом $\mathrm{FIRST}(A) \cap \mathrm{FIRST}(B) = \varepsilon$. Верно ли, что грамматика G может быть LL(1)-грамматикой?

Задача 44. Пусть для некоторых двух нетерминалов A и B приведённой КС-грамматики G пересечение $\mathrm{FOLLOW}(A) \cap \mathrm{FOLLOW}(B)$ оказалось непустым. Верно ли, что грамматика G не является LL(1)-грамматикой?

LR-анализ

Задача 45. Дана грамматика $G = \{\ \{A, S\},\ \{a, b, c\},\ \{\ S \to Aa \mid b \mid \varepsilon;\ A \to Ab \mid c\ \},\ S\ \}$. Является ли грамматика G LR(k)-грамматикой? При положительном ответе на вопрос найти минимальное k и построить соответствующий анализатор. Построить дерево разбора для цепочки $cbba$.

Задача 46. Дана грамматика $G = \{\ \{A, S\},\ \{a\},\ \{\ S \to A;\ A \to aAa \mid a\ \},\ S\}$. Является ли грамматика G LR(k)-грамматикой? При положительном ответе на вопрос найти минимальное k и построить соответствующий анализатор. Построить дерево разбора для цепочки $aaaaa$.

Задача 47. Дана грамматика $G = \{\ \{A, S\},\ \{a, b, c\},\ \{S \to Aa \mid b;\ A \to\ Ab \mid c\ \},\ S\ \}$. Является ли грамматика G LR(k)-грамматикой?

[7]Грамматика называется приведённой, если в ней нет недостижимых и бесплодных символов. В литературе также встречаются неэквивалентные определения этого термина.

При положительном ответе на вопрос найти минимальное k и построить соответствующий анализатор. Продемонстрировать работу анализатора на цепочке $cbbab$.

Задача 48. Зафиксируем КС-грамматику G и рассмотрим множество её LR(0)-ситуаций. Будем говорить, что между двумя ситуациями $\alpha.X\beta$ и $\alpha X.\beta$ определён переход по $X \in N \cup T$; также между ситуациями $A \to \alpha.B\beta$ и $B \to .\gamma$ определён ε-переход.

Конечный автомат, в качестве состояний которого выступают LR(0)-ситуации, а переходы определены по правилам, указанным выше, называют (недетерминированным) LR(0)-*автоматом* или (недетерминированным) *автоматом Кнута*. Автомат полученный в результате детерминизации описанного автомата называют детерминированным LR(0)-автоматом или детерминированным автоматом Кнута.

1. Выпишите все LR(0)-ситуации для грамматики G, заданной правилами $S \to aS \mid b$.

2. Постройте недетерминированный автомат Кнута для грамматики G.

3. Постройте детерминированный автомат Кнута для грамматики G.

4. Постройте LR(0)-анализатор для грамматики G. Сравните автомат Кнута с таблицей переходов LR(0)-анализатора для грамматики G.

Задача 49. Грамматика G задана правилами:

$$S \to Ab, \quad A \to aAa, \quad A \to B, \quad B \to b.$$

1. Построить LR(1) и LR(0)-анализаторы для грамматики G по алгоритму из курса.

2. Постройте LR(0)-анализатор по LR(1)-анализатору из пункта 1 следующим образом. Сотрите все аванцепочки и постройте управляющую таблицу LR(0)-анализатора по получившемуся автомату Кнута. Верно ли, что полученный LR(0)-анализатор является аналиазтором для грамматики G? То есть для любого слова, порождаемого G, анализатор строит корректный правый разбор, а слова, не порождаемые G, анализатор отвергает.

3. Покажите, что LR(0)-анализатор для грамматики G из пункта 1 можно построить путём применения следующей процедуры, схожей с процедурой минимизации ДКА, к LR(0)-автомату, полученному из LR(1)-анализатора в пункте 2.

В случае минимизации LR(0)-автомата, все состояния с операциями свёртки оказываются на первом шаге в разных группах (разных ящиках), если свёртки происходят по разным правилам; состояния с операциями сдвига находятся в одном ящике. Далее процедура минимизации LR(0)-автомата не отличается от процедуры минимизации ДКА.

Контрольные вопросы

Задача 50. При построении LR(1)-анализатора для грамматики G в одном множестве оказались ситуации $[A \to .aA\alpha, b]$ и $[B \to \beta.a, a]$, где α, β некоторые цепочки из $(N \cup T)^*$. Может ли грамматика G оказаться LR(0)-грамматикой?

Атрибутные грамматики

Следующий за синтаксическим анализом этап в процессе компиляции является генерация кода. В основе этого этапа лежат вычисления по дереву разбора, которые описывают с помощью атрибутных грамматик. Мы не будем детально изучать эту тему, а изучим лишь частный случай атрибутных грамматик (с синтезируемыми атрибутами).

Определение 3. КС-грамматика G называется *атрибутной с синтезируемыми атрибутами*, если каждому нетерминалу поставлен в соответствие набор переменных (атрибутов), и при этом для каждого правила грамматики

$$X_0 \to u_0 X_1 u_1 X_2 \dots u_{n-1} X_n u_n, X_i \in N, u_i \in \Sigma^*$$

Задан набор правил вычисления некоторых атрибутов

$$X_0[\mathsf{attr}] = f(X_1[\mathsf{attr}_1],\, X_2[\mathsf{attr}_2], \dots,\, X_n[\mathsf{attr}_n]);$$

здесь $X_i[\mathsf{attr}_i]$ – значение атрибута attr_i для нетерминала X_i , а f – некоторая функция. Набор правил вычислений атрибутов называют *атрибутной схемой*.

Замечание 3. *В книге* **[3]** *используются другие обозначения для атрибутных грамматик (традиционные для этой области). Вместо* $X_i[\mathsf{attr}]$ *пишут* $\mathsf{attr}(X_i)$*. Кроме того, там рассмотрен более общий случай атрибутных грамматик – с синтезируемыми и наследуемыми атрибутами. Выполняя задание, можно придерживаться одного из двух типов обозначений (заметим, что они непротиворечивы). Однако, пожалуйста, не смешивайте эти два набора.*

Пример 3. Грамматика G задана правилами

$$S \to 1D \mid 0,\ D \to 1D \mid 0D \mid 1 \mid 0$$

и порождает язык двоичных записей натуральных чисел. Определим атрибутную схему для этой грамматики

$$\begin{array}{llll}
S \to 0 & D \to 1 & D \to 0 & S \to 1D \\
S[\mathsf{val}] = 0 & D[\mathsf{val}] = 1 & D[\mathsf{val}] = 0 & S[\mathsf{val}] = D[\mathsf{ord}] + D[\mathsf{val}] \\
 & D[\mathsf{ord}] = 2 & D[\mathsf{ord}] = 2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
D_0 \to 1D_1 & D_0 \to 0D_1 \\
D_0[\mathsf{val}] = D_1[\mathsf{ord}] + D_1[\mathsf{val}] & D_0[\mathsf{val}] = D_1[\mathsf{val}] \\
D_0[\mathsf{ord}] = 2 \times D_1[\mathsf{ord}] & D_0[\mathsf{ord}] = 2 \times D_1[\mathsf{ord}]
\end{array}$$

В случае, если правило содержит несколько одинаковых нетерминалов мы нумеруем их вхождение и различаем атрибуты как в случае двух последних правил. Нетерминал S имеет единственный атрибут val, а нетерминал D – атрибуты val и ord. Приведённая атрибутная схема вычисляет значение числа по его двоичной записи. Атрибут ord равен 2^l, где l – длина слова выведенного из D, атрибут val равен значению числа, двоичная запись которого выведена из нетерминала.

Приведём пример вычисление атрибутов для слова 1101. Атрибуты вычисляются снизу вверх.

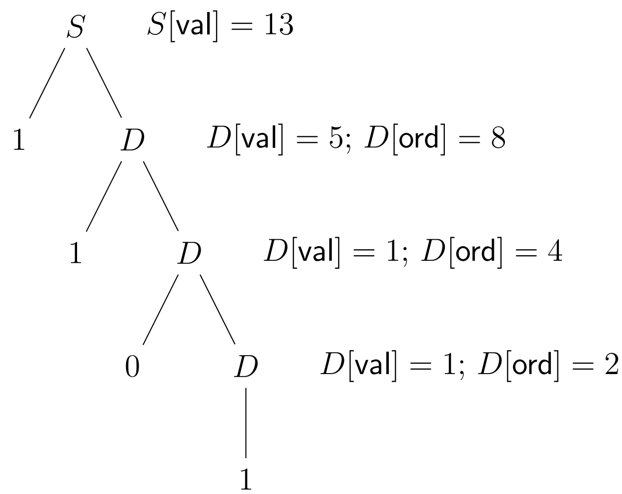


Рис. 6: вычисление атрибутов.

Задача 51. Грамматика $\mathsf{RExpr} = \langle \{E, T\}, \{a, b, +, ^*, (,)\}, P, E\rangle$ имеет множество правил P :

$$E \to (E)^* \mid T + T \mid TT \qquad T \to (E) \mid (E)^* \mid a \mid b$$

и порождает регулярные выражения над алфавитом $\{a, b\}$.

1. Постройте для грамматики RExpr LR(1)-анализатор.

2. Дополните грамматику RExpr до атрибутной так, чтобы она вычисляла атрибуты firstpos, lastpos и nullable согласно алгоритму их вычисления при построении ДКА по РВ.

Указание: Вычисление атрибута нужно определять через описание функции, которую можно описать на языке программирования или псевдокоде. Пример вычисления атрибута nullable для правила $E \to T_1 + T_2$:

$E[\mathsf{nullable}] = \textbf{function}(\ T_1[\mathsf{nullable}],\ T_2[\mathsf{nullable}])\{$
  $\textbf{if}(\ T_1[\mathsf{nullable}]\ \textbf{or}\ T_2[\mathsf{nullable}])\{$
    $\textbf{return}\ \mathsf{True};$
  $\}\,\textbf{else}\{\ \textbf{return}\ \mathsf{False};\ \}$
$\}$

3*. Добавьте в атрибутную схему вычисление атрибута followpos.

4. С помощью анализатора постройте дерево разбора для РВ $(a+ab)^* + a(b)^*$ и вычислите атрибуты firstpos, lastpos, nullable (*followpos) согласно атрибутной схеме.

Дополнительные задачи

В этот раздел входят задачи для подготовки к контрольным работам и экзаменам, а также задачи повышенной сложности для студентов, претендующих на высокие оценки. Задачи данного раздела не являются обязательными для прохождения процедуры сдачи задания, если только не входят в требования семинариста. Во всех письменных общекурсовых работах значение k в задачах на построение LR(k)-анализаторов не превосходит единицу.

Регулярные языки

Задача 52. Пусть X регулярный язык над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$. Верно ли, что язык $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\Sigma^* \setminus X)^n$ является регулярным?

Задача 53. Приведите пример бесконечного регулярного языка X над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$, такого что $X \cap (\Sigma^* \setminus X)^R = X$ и $X \neq \Sigma^*$.

Задача 54. Найдите разбиения на минимальное число классов правоинвариантной[8] (И/ИЛИ левоинвариантной) эквивалентности, которые индуцируют следующие языки.

1. Язык, порождаемый выражением $00(10+01)^*$.
2. Язык $\{a^{n^2} \mid n \geqslant 0\}$ в однобуквенном алфавите.

[8]Правоинвариантная эквивалентность – другое название эквивалентности Майхилла-Нероуда. Левоинвариантная эквивалентность определяется симметрично правоинвариантной.

КС-языки

Задача 55. Язык L задан грамматикой G с правилами:

$$S \to bSa \mid AB \mid \varepsilon, \quad A \to bAb \mid b, \quad B \to aBa \mid \varepsilon.$$

Является ли язык L и его дополнение регулярным языком, КС-языком?

Задача 56. Являются ли следующие языки КС-языками?

1. $\{x \mid x \in \{c,b\}^*, |x|_c = |x|_b, \forall u,v : x = uv, |u| \neq 0, |v| \neq 0, |u|_c > |u|_b\}$.
2. $\{a^{3^n} \mid n > 0\}$.

Задача 57*. Пусть A – МА. Построите МА B, принимающий все префиксы языка $L(A)$, т.е. язык $L(B) = \{x \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L(A)\} \subseteq \Sigma^*$.

Задача 58. Для языка

$$L = \{w \mid w = xc^{3k}y; x,y \in \{a,b\}^*; |xy|_a = 2n;\ n,k \geqslant 0\}$$

$$(\ |xy|_a \text{ – число символов } a \text{ в слове } xy)$$

1) постройте КС-грамматику G, порождающую язык L;

2) постройте недетерминированный МА, эквивалентный этой грамматике;

3) продемонстрируйте работу построенного МА на слове $accab$ (проанализируйте все варианты поведения).

Задача 59. Заданы языки $L_1 = \{a^n b^n c^m : n \geqslant 1, m \geqslant 0\}$, $L = \{f^n a^m b^m : n \geqslant 0, m \geqslant 0\}$. Для языка $L_1 \cup L_2$ построить однозначную КС-грамматику и детерминированный МП-автомат. Решение обосновать.

Элементы синтаксического анализа

Задача 60. Язык L задан неоднозначной КС-грамматикой:

$$G = \{\,\{S\},\, \{a, ., ^\wedge, [\,,]\,, (\,,)\,\},\, \{\, S \to a \mid S.S \mid S[S] \mid S^\wedge \mid S(S)\,\},\, S\,\}.$$

Написать LL(1)-грамматику для языка L.

Задача 61. Дана грамматика $G = \{\ \{A, B, C, D, E, S\},\ \{a, b\},$ $\{S \to AB,\ A \to a,\ B \to CD \mid aE,\ C \to ab,\ D \to bb,\ E \to bba\ \},\ S\ \}$. Является ли грамматика G LR(k)-грамматикой? При положительном ответе на вопрос найти минимальное k и построить соответствующий анализатор. Построить дерево разбора для слова $aabbb$ с помощью анализатора.

Задание составил А. А. Рубцов, к.ф.-м.н.

Задание содержит авторские задачи педагогического коллектива кафедры МОУ и классические задачи теории формальных языков.

С методическими материалами по курсам кафедры МОУ можно ознакомиться на страницах:

http://www.mou.mipt.ru, http://trpl7.ru,
http://lrk.umeta.ru, http://rubtsov.su.